

### 三角形の外心・垂心・重心の関係

#### 外心を定点とする位置ベクトルによる垂心のベクトル表記

外心  $O$  を始点とする位置ベクトルについて、

$$\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}, \vec{OH} = \vec{h} \text{ と定めると, } \vec{h} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

証明

$\triangle ABC$  の外心を  $O$ , 垂心を  $H$ , 線分  $CE$  を外接円の直径,

$O$  から線分  $BC$  に下ろした垂線の足を  $D$ , 直線  $AH$  と線分  $BC$  の交点を  $F$  とする。

線分  $OD$  は線分  $BC$  の垂直二等分線だから  $CD = DB$ ,

$\angle EBC$  は直径  $CE$  の円周角だから  $\angle EBC = 90^\circ$

よって, 中点連結定理より,  $EB = 2OD \dots \textcircled{1}$

また,

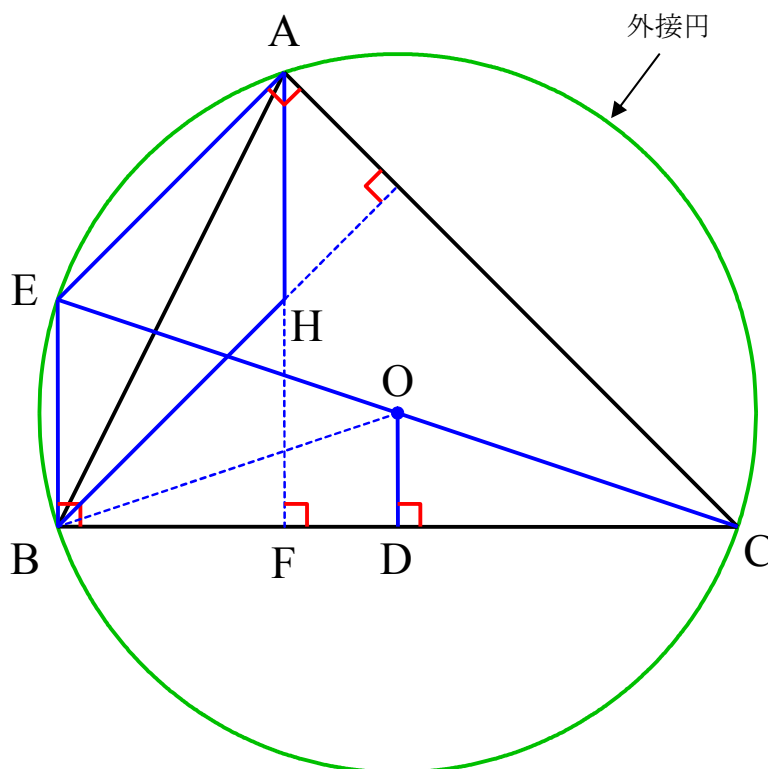
$\angle AFC = 90^\circ$  より,  $EB \parallel AH \dots \textcircled{2}$

同様に,  $EA \parallel BH \dots \textcircled{3}$

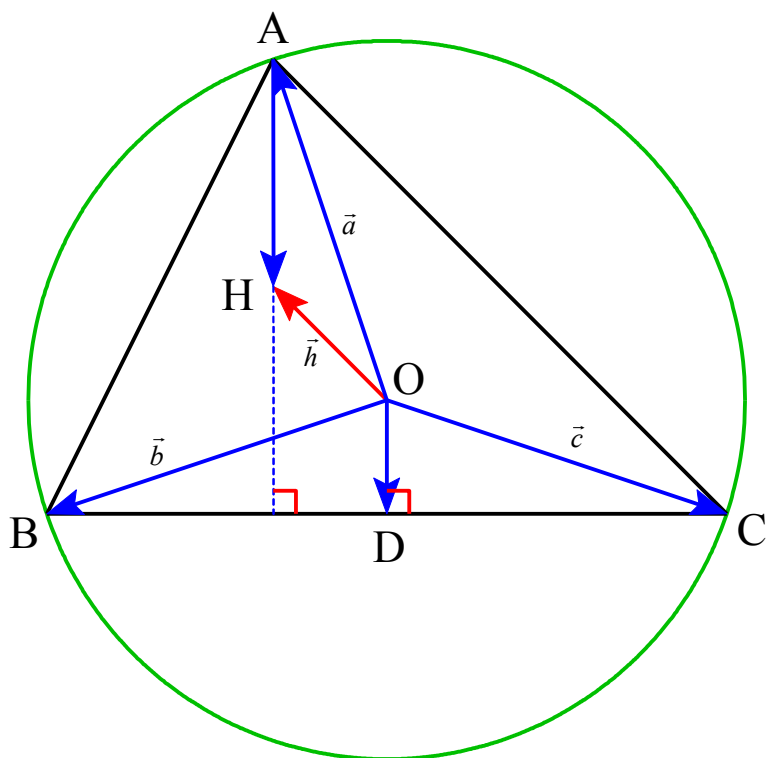
$\textcircled{2}$ ,  $\textcircled{3}$  より, 四角形  $AEBH$  は平行四辺形である。

よって,  $AH = EB$

これと  $\textcircled{1}$  より,  $AH = 2OD \dots \textcircled{4}$



外心  $O$  を始点とする位置ベクトルについて、  
 $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$ ,  $\vec{OC} = \vec{c}$ ,  $\vec{OH} = \vec{h}$  と定めると、  
 $AH \parallel OD$  と④より、 $\vec{AH} = 2\vec{OD} = \vec{b} + \vec{c}$   
これと  $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{AH}$  より、 $\vec{h} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$



## 外心と垂心と重心の関係

線分 OH と線分 AD の交点を  $G'$  とすると、

$AH \parallel OD$  より  $\triangle AG'H \sim \triangle DG'O$

これと④より、 $AG' : DG' = AH : OD = 2 : 1 \dots\dots ⑤$

一方、 $\triangle ABC$  の重心を  $G$  とすると、 $AD$  は辺  $BC$  の中線だから、

$AG : DG = 2 : 1 \dots\dots ⑥$

⑤、⑥より、 $G'$  と  $G$  は同一の点であることがわかる。

よって、同一法により、 $\triangle ABC$  の外心、垂心、重心は一直線上にある。

